2重 Eisenstein 級数とその周辺 (解析的整数論 : 数論的関数の多重性に関連して)

田坂, 浩二

数理解析研究所講究録
第 1806 巻 2012 年 200-209

2重Eisenstein級数とその周辺

田坂 浩二 (九州大学数理学府)
Koji Tasaka (Kyushu university)

double shuffle relation と呼ばれる, 多重ゼータ値の関係式族がある. この関係式族の特殊な場合を考えることにより, あるモジュラー形式の間の関係式を得られることが知られている. 今回, この議論を用いてレベル 2 のモジュラー形式の空間の基底を決定し, その応用として, ある 2 重ゼータ値が張るベクトル空間の次元の評価や, 平方和の表現数に関する明示公式を与える.

目 次

1 Introduction and main results

この節では, 主結果 (Theorem 2 と Theorem 4) を述べ, 定理のすぐ後に問題点や関連する話題を紹介する. なお, これらの結果は各々[5] と [6] でまとめられる予定である.

正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(k_1 \geq 2)$ に対し, 多重ゼータ値を次で定める:

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}.$$

整数 $\sum k_i, n$ をそれぞれ "重さ", "深さ" と呼ぶ. 深さ 2 の場合を, 特に 2 重ゼータ値と呼ぶ. 2 重ゼータ値は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式と関係することが知られている ([2, 4]) が, 特に重さ k の 2 重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の次元に, 重さ k の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のモジュラー形式の空間の次元が現れる.

Theorem 1. (Gangl-Kaneko-Zagier [2], Kaneko [4]) 正の偶数 $k \geq 4$ に対し,

$$\dim\langle \zeta(r, k-r) \mid 2 \leq r \leq k-1 \rangle_{\mathbb{Q}} \leq \frac{k}{2} - 1 - \dim S_k(1)$$

が成り立つ. ここで, $S_k(1)$ は重さ k の $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ におけるカスプ形式が張る空間である.

Theorem 1 に対し, $\Gamma_0(2) := \{(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod 2\}$ のモジュラー形式における類似の結果が得られた. レベル 2 の 2 重ゼータ値を次で定める:

$$\zeta^{\mathrm{oo}}(r,s) = \sum_{\substack{m>n>0 \\ m,n:\mathrm{odd}}} \frac{1}{m^r n^s} \quad (r \geq 2, s \geq 1).$$

Theorem 2. (Kaneko, T. [5]) 正の偶数 $k \geq 4$ に対し,

$$\dim\langle \zeta^{\mathrm{oo}}(2r, k-2r) \mid 1 \leq r \leq k/2-1 \rangle_{\mathbb{Q}} \leq \frac{k}{2} - 1 - \dim S_k(2)$$

が成り立つ. ここで, $S_k(2)$ は重さ k の $\Gamma_0(2)$ におけるカスプ形式が張る空間である.

Remarks of Theorems 1 and 2.

1. 重さ k の 2 重ゼータ値の個数は $k-2$ 個であるので, Theorem 1 は "重さ k の 2 重ゼータ値の間には, 少なくとも $k-2-k/2+1+\dim S_k(1) (= k/2-1+\dim S_k(1))$ 個の関係式がある" ということ意味している. これらの関係式の内, $S_k(1)$ に由来する関係式達はモジュラー形式と同型な周期多項式と呼ばれる対象から具体的に計算できる ([2]). Theorem 2 も同様に, "重さ k のレベル 2 の偶数インデックスの 2 重ゼータ値の間には, 少なくとも $\dim S_k(2)$ 個の関係式がある" ということを意味しているが, レベル 2 の周期多項式からレベル 2 の 2 重ゼータ値の間の具体的な関係式を得ることはできていない.

2. Theorem 1 と 2 は, 最良の上限を与えていることが計算機を用いて確かめられる. 各々,

$$\mathcal{DZ}_k = \langle \zeta(r, k-r) \mid 2 \leq r \leq k-1 \rangle_{\mathbb{Q}},$$
$$\mathcal{DZ}_k^{(2)} = \langle \zeta^{\mathrm{oo}}(2r, k-2r) \mid 1 \leq r \leq k/2-1 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

と定めると, 計算機を用いて次のような基底が得られる.

weight	conjectural basis of $\mathcal{DZ}_k$	conjectural basis of $\mathcal{DZ}_k^{(2)}$
$k=4$	$\zeta(3,1)$	$\zeta^{\mathrm{oo}}(2,2)$
$k=6$	$\zeta(5,1), \zeta(3,3)$	$\zeta^{\mathrm{oo}}(2,4), \zeta^{\mathrm{oo}}(4,2)$
$k=8$	$\zeta(7,1), \zeta(5,3), \zeta(3,5)$	$\zeta^{\mathrm{oo}}(2,6), \zeta^{\mathrm{oo}}(4,4)$
$k=10$	$\zeta(9,1), \zeta(7,3), \zeta(5,5), \zeta(3,7)$	$\zeta^{\mathrm{oo}}(2,8), \zeta^{\mathrm{oo}}(4,6), \zeta^{\mathrm{oo}}(6,4)$
$k=12$	$\zeta(11,1), \zeta(9,3), \zeta(7,5), \zeta(5,7)$	$\zeta^{\mathrm{oo}}(2,10), \zeta^{\mathrm{oo}}(4,8), \zeta^{\mathrm{oo}}(6,6)$

空間 $\mathcal{DZ}_k$ に対し, この空間が奇数インデックスの 2 重ゼータ値で張られることが知られている ([2]). 重さ 12 でカスプ形式が現れるので, 生成元から $\zeta(3,9)$ を除くことができる. 空間 $\mathcal{DZ}_k^{(2)}$ においては, 重さ 8 でカスプ形式が現れるので, 生成元から $\zeta^{\mathrm{oo}}(6,2)$ が除かれていることがわかる. さらに数値実験を進めると, 次のような予想が得られた.

Conjecture 3. 正の偶数 $k \geq 4$ に対し, $\mathcal{DZ}_k$ は $\mathcal{DZ}_k^{(2)}$ を含む.

今のところ, $k = 6$ でさえ Conjecture 3 を証明することが出来ていない. 今後, $\zeta^{\mathrm{oo}}(r,s)$ の間の線形関係の研究を押し進める一つの動機になれば嬉しい.

一方, 2 重 Eisenstein 級数の研究から全く予期せぬ結果が得られたので, それを紹介する. 正の整数 s に対し, 自然数 n を s 個の平方数 (または三角数) で表す方法の個数を以下のように定める:

$$r_s(n) := \sharp\{(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}^s \mid n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2\},$$
$$t_s(n) := \sharp\{(x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s \mid n = \frac{x_1(x_1+1)}{2} + \cdots + \frac{x_s(x_s+1)}{2}\}.$$

これらの数は Fermat や Euler 等の時代から古典的によく研究されている対象であり, 類数といった代数的整数論の対象とも関連することが知られている. 近年の Kac-Wakimoto 予想の解決を皮切りに, これらの数の明示公式への関心が高まりつつある. 今回, 2 重 Eisenstein 級数を考えることの一つの応用として, これらの数の明示公式を得た. 定理を述べるため, いくつか記号を準備する. 正の整数 k に対し,

$$\sigma_{k-1}^{i\infty}(n) = \sum_{d|n} (-1)^d d^{k-1}, \quad \sigma_{k-1}^{0}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d:\mathrm{odd}}} d^{k-1}$$

とおくと, これらは各々 $\Gamma_0(2)$ のカスプ $i\infty$ と 0 に対応する Eisenstein 級数の係数として現れる (定義は次節で与える). ここで, 便宜上 $\sigma_{k-1}^{i\infty}(0) = (1-2^k)B_k/2k$ とおく (B_k : Bernoulli 数). これらある種の divisor function 達の積を

$$\rho_{r,s}^{i\infty}(n) = \sum_{m=0}^{n} \sigma_r^{i\infty}(m)\sigma_s^{i\infty}(n-m), \quad \rho_{r,s}^{0}(n) = \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_r^{0}(m)\sigma_s^{0}(n-m)$$

とおく.

Theorem 4. (T. [6]) 正の整数 $s \geq 2$ に対し, 次を満たすような有理数 $\mu_s(l)$ ($l = 2, 3, \ldots, s$) が一意に定まる:

$$r_{8s}(n) = (-1)^n \frac{2^{4s}}{(4s-2)!} \sum_{l=2}^{s} \mu_s(l) \binom{4s-2}{2l-1} \rho_{4s-2l-1,2l-1}^{i\infty}(n) \quad (n \geq 0),$$
$$t_{8s}(n-s) = \frac{1}{(4s-2)!} \sum_{l=2}^{s} \mu_s(l) \binom{4s-2}{2l-1} \rho_{4s-2l-1,2l-1}^{0}(n) \quad (n \geq s).$$

いくつかの $\mu_s(l)$ の表を載せておく.

$s=2$	$\mu_2(2)=36$
$s=3$	$\mu_3(2)=420,\ \mu_3(3)=-200$
$s=4$	$\mu_4(2)=3168,\ \mu_4(3)=-3600,\ \mu_4(4)=1764$
$s=5$	$\mu_5(2)=21060,\ \mu_5(3)=-30810,\ \mu_5(4)=36860,\ \mu_5(5)=-19116$

Remarks of Theorem 4.

1. Theorem 4 は本質的に Chan 氏と Chua 氏 ([1]) によって予想されたものである.

2. Imamoḡlu 氏と Kohnen 氏 ([3]) によって, Theorem 4 の類似の式が得られている: ある $\lambda, \lambda_l \in \mathbb{Q}$ が存在して,

$$r_{8s}(n) = \lambda\sigma^{i\infty}_{4s-1}(n) + \sum_{l=2}^{2s-2} \lambda_l \sum_{m=0}^{n-1} \sigma^{i\infty}_{4s-2l-1}(m)\sigma^{0}_{2l-1}(n-m) \tag{1.1}$$

を満たす. カスプ $i\infty$ と 0 に対応する $\Gamma_0(2)$ の Eisenstein 級数を各々 $G_k^{i\infty}$ と G_k^0 とおく. すると, 式 (1.1) は次の結果に帰着される ([3, Theorem 1]):

$$\langle G^0_{2r}G^{i\infty}_{k-2r} \mid 2 \le r \le k/2-2\rangle_{\mathbb{Q}} = S_k^{\mathbb{Q}}(2). \tag{1.2}$$

ここで, $S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ は $\Gamma_0(2)$ の有理数係数のカスプ形式が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間である.

3. 係数 $\mu_s(l)$ については, 一意的に定まること以外は何も言えていない. 例えば $\mu_s(l)$ がいつも整数かどうか (講演中の松本耕二氏による指摘) は, 講演後に $s=6,7,8,9$ 等を計算してみたところ, これらの場合はかならず分母が現れることが確認された. 例:

$$\mu_6(2)=49605048/343,\ \mu_6(3)=-77902500/343,\ \mu_6(4)=15741540/49,$$
$$\mu_6(5)=-139785750/343,\ \mu_6(6)=74727180/343.$$

2 Key Lemmas

Theorem 2 と Theorem 4 の証明は, 各々次の Lemma 5 と Lemma 6 に帰着される.

Lemma 5. 正の偶数 $k \ge 4$ に対し, 次の集合 $\{G_k^{i\infty}(\tau), G_{2r}^{i\infty}(\tau)G_{k-2r}^{i\infty}(\tau) \mid 2 \le r \le [k/4]\}$ は $\mathbb{Q}G_k^{i\infty}(\tau) \oplus S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ の基底をなす.

Lemma 6. 正の偶数 $k \ge 4$ に対し, 次の集合 $\{G_k^{0}(\tau), G_{2r}^{0}(\tau)G_{k-2r}^{0}(\tau) \mid 2 \le r \le [k/4]\}$ は $\mathbb{Q}G_k^{0}(\tau) \oplus S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ の基底をなす.

ここで, $M_k^{\mathbb{Q}}(2)=\mathbb{Q}G_k^0\oplus\mathbb{Q}G_k^{i\infty}\oplus S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ であることに注意しておく. Lemma 5 と Lemma 6 の我々の証明には, レベル 2 の double shuffle relation が重要な役割を果たす. 整数 $r\geq 2, s\geq 1$ に対し, レベル 2 の 2 重ゼータ値を次で定める:

$$\zeta^{\mathrm{oe}}(r,s)=\sum_{\substack{m>n>0\\ m\ \mathrm{odd}, n\ \mathrm{even}}}\frac{1}{m^r n^s},\quad \zeta^{\mathrm{eo}}(r,s)=\sum_{\substack{m>n>0\\ m\ \mathrm{even}, n\ \mathrm{odd}}}\frac{1}{m^r n^s}.$$

既に, odd-odd 型のレベル 2 の 2 重ゼータ値は定義した. これら実数値に対し, 次の double shuffle relation が成り立つ:

Proposition 7. 整数 $r,s\geq 2$ に対し

$$\begin{aligned}\zeta^{\mathrm{o}}(r)\zeta^{\mathrm{e}}(s)&=\zeta^{\mathrm{oe}}(r,s)+\zeta^{\mathrm{eo}}(s,r)\\&=\sum_{i+j=k}\binom{i-1}{r-1}\zeta^{\mathrm{oe}}(i,j)+\sum_{i+j=k}\binom{i-1}{s-1}\zeta^{\mathrm{oo}}(i,j),\\ \zeta^{\mathrm{o}}(r)\zeta^{\mathrm{o}}(s)&=\zeta^{\mathrm{oo}}(r,s)+\zeta^{\mathrm{oo}}(s,r)+\zeta^{\mathrm{o}}(r+s)\\&=\sum_{i+j=k}\left(\binom{i-1}{r-1}+\binom{i-1}{s-1}\right)\zeta^{\mathrm{eo}}(i,j).\end{aligned}$$

ここで, $\zeta^{\mathrm{o}}(k)=\sum_{n>0:\mathrm{odd}}n^{-k}$, $\zeta^{\mathrm{e}}(k)=\sum_{n>0:\mathrm{even}}n^{-k}$ である. 今後, 和の取り方 $i+j=k$ は $i,j\geq 1$ を動くとする.

Proposition 7 は, $r\geq 1$ または $s\geq 1$ に対して拡張することができる (詳細は [5]). この場合, 発散する項は変数 T の実数係数の多項式になる. レベル 2 の double shuffle relation の性質を調べるため, 次のような形式空間を導入する:

Definition 8. 整数 $k\geq 2$ に対し, 次の関係式を満たす変数 $Z_{r,s}^{\mathrm{eo}}, Z_{r,s}^{\mathrm{oe}}, Z_{r,s}^{\mathrm{oo}}, P_{r,s}^{\mathrm{oe}}, P_{r,s}^{\mathrm{oo}}$ $(r+s=k, r,s\geq 1)$ と Z_k^{o} が張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{D}_k^{(2)}$ とおく:

$$P_{r,s}^{\mathrm{oe}}=Z_{r,s}^{\mathrm{oe}}+Z_{s,r}^{\mathrm{eo}}=\sum_{i+j=k}\binom{i-1}{r-1}Z_{i,j}^{\mathrm{oe}}+\sum_{i+j=k}\binom{i-1}{s-1}Z_{i,j}^{\mathrm{oo}},\tag{2.1}$$

$$P_{r,s}^{\mathrm{oo}}=Z_{r,s}^{\mathrm{oo}}+Z_{s,r}^{\mathrm{oo}}+Z_k^{\mathrm{o}}=\sum_{i+j=k}\left(\binom{i-1}{r-1}+\binom{i-1}{s-1}\right)Z_{i,j}^{\mathrm{eo}}.\tag{2.2}$$

つまり,

$$\mathcal{D}_k^{(2)}=\frac{\langle Z_{r,k-r}^{\mathrm{eo}}, Z_{r,k-r}^{\mathrm{oe}}, Z_{r,k-r}^{\mathrm{oo}}, P_{r,k-r}^{\mathrm{oe}}, P_{r,k-r}^{\mathrm{oo}}, Z_k^{\mathrm{o}}\mid 1\leq r\leq k-1\rangle_{\mathbb{Q}}}{\langle \text{relations (2.1), (2.2)}\rangle}.$$

Lemmas の証明のために重要な, 空間 $\mathcal{D}_k^{(2)}$ の性質は次である:

Proposition 9. 正の偶数 $k \geq 4$ に対し,

(1) $\frac{1}{4}Z_k^{\mathbf{o}} = \sum_{\substack{r=2 \\ r:\text{even}}}^{k-2} Z_{r,k-r}^{\mathbf{oo}}$.

(2) 全ての $P_{2r,k-2r}^{\mathbf{oe}}$ $(r=1,2,\ldots,k/2-1)$ は $P_{2r,k-2r}^{\mathbf{oo}}$ $(r=2,3,\ldots,[k/4])$ と $Z_k^{\mathbf{o}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の一次結合で書ける.

Proposition 9 から, 空間 $\mathcal{D}_k^{(2)}$ の部分空間として次の等式が成り立つ:

$$\langle P_{2r,k-2r}^{\mathbf{oe}}, P_{2r,k-2r}^{\mathbf{oo}}, Z_k^{\mathbf{o}} \mid 1 \leq r \leq k/2-1 \rangle_{\mathbb{Q}} = \langle P_{2r,k-2r}^{\mathbf{oo}}, Z_k^{\mathbf{o}} \mid 2 \leq r \leq [k/4] \rangle_{\mathbb{Q}}. \tag{2.3}$$

Remark : 空間 $D_k^{(2)}$ は, 各生成元 $Z_{r,s}^{\mathbf{eo}}, Z_{r,s}^{\mathbf{oe}}, Z_{r,s}^{\mathbf{oo}}, P_{r,s}^{\mathbf{oe}}, P_{r,s}^{\mathbf{oo}}, Z_k^{\mathbf{o}}$ を $\zeta^{\mathrm{eo}}(r,s), \zeta^{\mathrm{oe}}(r,s)$, $\zeta^{\mathrm{oo}}(r,s), \zeta^{\mathrm{o}}(r)\zeta^{\mathrm{e}}(s), \zeta^{\mathrm{o}}(r)\zeta^{\mathrm{o}}(s), \zeta^{\mathrm{o}}(k)$ に送ることで, レベル 2 の 2 重ゼータ値が張る空間への全射な対応が得られる (レベル 2 の 2 重ゼータ値が double shuffle relation を満たすことが本質.). この場合, 空間 $\langle P_{2r,k-2r}^{\mathbf{oe}}, P_{2r,k-2r}^{\mathbf{oo}}, Z_k^{\mathbf{o}} \mid 1 \leq r \leq k/2-1 \rangle_{\mathbb{Q}}$ は $\langle \pi^k \rangle_{\mathbb{Q}}$ に落ちるので, Proposition 9 だけではこの空間の次元の最良な評価は得られないことが分かる.

以降, e (resp. **o**) で偶数全体 (resp. 奇数全体) を表し, τ は複素上半平面の元とする. まず, 2 重 Eisenstein 級数を次で定義する:

$$G_{r,s}^{ABCD}(\tau) := \frac{1}{(2\pi i)^{r+s}} \sum_{\substack{m\tau+n > m'\tau+n' > 0 \\ m\in A, n\in B, m'\in C, n'\in D}} \frac{1}{(m\tau+n)^r (m'\tau+n')^s}. \tag{2.4}$$

ここで, $A,B,C,D \in \{\mathbf{e},\mathbf{o},\mathbb{Z}\}$ をとり, $m\tau+n>0$ は $m>0$ か $m=0$ ならば $n>0$ と定める. すると, $m\tau+n > m'\tau+n'$ は $(m-m')\tau+(n-n')>0$ で定まる. 級数 (2.4) は $r>2, s>1$ において絶対収束する. 上記の記号を用いて, Eisenstein 級数を以下のように定義する:

$$G_k(\tau) := \frac{1}{(2\pi i)^k} \sum_{\substack{m\tau+n>0 \\ m,n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} = \frac{\zeta(k)}{(2\pi i)^k} + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

$$G_k^{i\infty}(\tau) := \frac{1}{(2\pi i)^k} \sum_{\substack{m\tau+n>0 \\ m\in\mathbf{e}, n\in\mathbf{o}}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} = \frac{\zeta^{\mathrm{o}}(k)}{(2\pi i)^k} + \frac{(-1)^k}{2^k(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}^{i\infty}(n) q^n,$$

$$G_k^{0}(\tau) := \frac{1}{(2\pi i)^k} \sum_{\substack{m\tau+n>0 \\ m\in\mathbf{o}, n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{n>0} \sigma_{k-1}^{0}(n) q^n.$$

二つ目の等式は, 定義級数が絶対収束するところ $(k \geq 3)$ において, Lipschitz の公式を用いて得られる $(q = e^{2\pi i\tau})$. 偶数 $k \geq 4$ に対し, これらはモジュラー形式になっており, 奇数 k に対しては, 非零な上半平面上の正則関数を与える.

Lemma 5 の証明は, 次の定理から導かれる.

Theorem 10. 正の整数 $k \geq 3, k = r + s$ $(r, s \geq 1, (r,s) \neq (1,1))$ に対し,

$$Z_k^{\mathbf{o}} = G_k^{i\infty}(\tau),\ Z_{r,s}^{\mathbf{eo}} = G_{r,s}^{\mathbf{eeeo}}(\tau),\ Z_{r,s}^{\mathbf{oe}} = G_{r,s}^{\mathbf{eoee}}(\tau),\ Z_{r,s}^{\mathbf{oo}} = G_{r,s}^{\mathbf{eoeo}}(\tau),$$
$$P_{r,s}^{\mathbf{oe}} = G_r^{i\infty}(\tau)G_s(\tau)/2^s + \delta_{r,2}G_s(\tau)'/2^{s+3}s + \delta_{s,2}G_r^{i\infty}(\tau)'/8r,$$
$$P_{r,s}^{\mathbf{oo}} = G_r^{i\infty}(\tau)G_s^{i\infty}(\tau) + (\delta_{r,2}+\delta_{s,2})G_{k-2}(\tau)'/8(k-2)$$

と置くと, これらは *double shuffle relation (2.1-2)* を満たす. ここで, $' := q\cdot d/dq$, δ はクロネッカー記号である.

変数 r, s が ≥ 1 を動くため, 2 重 Eisenstein 級数や Eisenstein 級数の定義を拡張する必要があるが, その詳細は論文 [5] に譲る.

Proof of Lemma 5.
Lemma 5 を証明する. まず, Eisenstein 級数の定義から次がわかる.

$$G_k^0(\tau) = G_k(\tau) - G_k(2\tau), \quad G_k^{i\infty}(\tau) = G_k(2\tau) - 2^{-k}G_k(\tau).$$

ここから, 簡単な計算により

$$G_{2r}^0(\tau)G_{k-2r}^{i\infty}(\tau) = (2^{2r}-1)G_{2r}^{i\infty}(\tau)G_{k-2r}(\tau)/2^{k-2r} - G_{2r}^{i\infty}(\tau)G_{k-2r}^{i\infty}(\tau)$$

を得る. すると, Proposition 9 により, $G_{2r}^{i\infty}(\tau)G_{k-2r}(\tau)/2^{k-2r}$ が $G_{2r}^{i\infty}(\tau)G_{k-2r}^{i\infty}(\tau)$ $(r = 2, 3, \ldots, [k/4])$ と $G_k^{i\infty}(\tau)$ の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書けることがわかるので, 以下を得る:

$$\mathbb{Q}G_k^{i\infty} \oplus \langle G_{2l}^0 G_{k-2l}^{i\infty} \mid 2 \leq l \leq k/2-2\rangle_{\mathbb{Q}} \subset \langle G_k^{i\infty}, G_{2r}^{i\infty}G_{k-2r}^{i\infty} \mid 2 \leq r \leq [k/4]\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

ところで, Imamoḡlu 氏と Kohnen 氏の結果 (1.2) により, 左辺 $= \mathbb{Q}G_k^{i\infty} \oplus S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ である. 右辺の生成元の個数と $\dim S_k(2) = [k/4] - 1$ から, 次元の評価により

$$\mathbb{Q}G_k^{i\infty} \oplus S_k^{\mathbb{Q}}(2) = \langle G_k^{i\infty}, G_{2r}^{i\infty}G_{k-2r}^{i\infty} \mid 2 \leq r \leq [k/4]\rangle_{\mathbb{Q}}$$

を得る.

□

同様に, Lemma 6 は次の定理から導かれる.

Theorem 11. 正の整数 $k \geq 2, k = r + s$ $(r, s \geq 1)$ に対し,

$$Z_k^{\mathbf{o}} = G_k^0(\tau),\ Z_{r,s}^{\mathbf{eo}} = G_{r,s}^{\mathbf{e\mathbb{Z}o\mathbb{Z}}}(\tau),\ Z_{r,s}^{\mathbf{oe}} = G_{r,s}^{\mathbf{o\mathbb{Z}e\mathbb{Z}}}(\tau),\ Z_{r,s}^{\mathbf{oo}} = G_{r,s}^{\mathbf{o\mathbb{Z}o\mathbb{Z}}}(\tau)$$
$$P_{r,s}^{\mathbf{oe}} = G_r^0(\tau)G_s(2\tau) + \delta_{r,2}G_s(2\tau)'/4s + \delta_{s,2}G_r^0(\tau)'/4r,$$
$$P_{r,s}^{\mathbf{oo}} = G_r^0(\tau)G_s^0(\tau) + (\delta_{r,2}+\delta_{s,2})G_{k-2}^0(\tau)'/4(k-2)$$

と置くと, これらは *double shuffle relation (2.1-2)* を満たす.

カスプ $i\infty$ の 2 重 Eisenstein 級数のとき同様, Theorem 11 の右側の関数において変数 r, s を ≥ 1 に拡張しなくてはならない. これら詳細は論文 [6] に譲る. Theorem 11 により, Proposition 9 が適用でき, $G_{k-2r}^0(\tau)G_{2r}^{i\infty}(\tau) = 2^{-2r}((2^{2r}-1)G_{2r}^0(\tau)G_{k-2r}(2\tau) - G_{2r}^0(\tau)G_{k-2r}^0(\tau))$ を用いることにより, Lemma 5 の証明と同様の方法で Lemma 6 が導かれる.

3 Proofs of Theorems

残りの紙面で, 主結果の証明を簡単に紹介する.

Proof of Theorem 2.

まず, 空間 $\mathcal{DE}_k^{(2)}$ を次で定める:

$$\mathcal{DE}_k^{(2)} := \langle G^{\mathbf{eoeo}}_{2r,k-2r}(\tau) \mid 1 \le r \le k/2-1 \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

2重 Eisenstein 級数 $G^{\mathrm{eoeo}}_{r,s}(\tau)$ は q-級数としての定数項に $\zeta^{\mathrm{oo}}(r,s)/(2\pi i)^{-r-s}$ を持つ (級数での定義を与えていないが, Fourier 展開の計算からすぐわかる.). すると, 定数項をとる射影 $\pi : \mathcal{DE}_k^{(2)} \to \overline{\mathcal{DZ}_k}^{(2)} := \langle (2\pi i)^{-k}\zeta^{\mathrm{oo}}(2r,k-2r) \mid 1 \le r \le k/2-1 \rangle_{\mathbb{Q}}$ が得られる. これにより, 次の完全系列を得る:

$$0 \longrightarrow \ker\pi \longrightarrow \mathcal{DE}_k^{(2)} \longrightarrow \overline{\mathcal{DZ}_k}^{(2)} \longrightarrow 0.$$

これより, $\dim_{\mathbb{Q}} \overline{\mathcal{DZ}_k}^{(2)} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DZ}_k^{(2)} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DE}_k^{(2)} - \dim_{\mathbb{Q}} \ker\pi$ がわかる. 生成元の個数から, $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{DE}_k^{(2)} \le k/2-1$ を得る. Theorem 10 より,

$$G^{\mathbf{eoeo}}_{2r,k-2r}(\tau) + G^{\mathbf{eoeo}}_{k-2r,2r}(\tau) + G^{i\infty}_k(\tau) = G^{i\infty}_{2r}(\tau)G^{i\infty}_{k-2r}(\tau) + \delta_{r,2}G_{k-2}(\tau)'/2^3(k-2)$$

となる. これと和公式 (Proposition 9 (1)) から, Lemma 5 を用いて

$$\mathcal{DE}_k^{(2)} \supset \langle G^{i\infty}_k(\tau), G^{i\infty}_{2r}(\tau)G^{i\infty}_{k-2r}(\tau) \mid 2 \le r \le [k/4] \rangle_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}G^{i\infty}_k(\tau) \oplus S_k^{\mathbb{Q}}(2)$$

を得る. ところで, 空間 $\ker\pi$ は, $\mathcal{DE}_k^{(2)}$ の定数項を持たないものが張る部分空間であるので, $\ker\pi \supset S_k^{\mathbb{Q}}(2)$ となる. すなわち,

$$\dim\ker\pi \ge \dim S_k(2).$$

したがって, 結論を得る:

$$\dim \mathcal{DZ}_k^{(2)} \le \frac{k}{2} - 1 - \dim S_k(2).$$

□

Proof of Theorem 4.

標準的な theta 関数 $T(\tau)$ と $\theta(\tau)$ を以下で定める:

$$T(\tau) := \sum_{n\ge0} q^{n(n+1)/2}, \quad \theta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}.$$

このとき, 整数 $s \ge 1$ に対し,

$$T(\tau)^{8s} = q^s \sum_{n\ge0} t_{8s}(n)q^n \in M_{4s}^{\mathbb{Q}}(2) = \mathbb{Q}G^{i\infty}_{4s}(\tau) \oplus \mathbb{Q}G^0_{4s}(\tau) \oplus S_{4s}^{\mathbb{Q}}(2)$$

が知られている．モジュラー形式 $T(\tau)^{8s}$ は，明らかに $\mathbb{Q}\cdot G_{4s}^{0}(\tau)\oplus S_{4s}^{\mathbb{Q}}(2)$ に含まれている．すると，Lemma 6 により次を満たすような有理数 $\alpha, \mu_s(l)$ $(l=2,3,\ldots,s)$ が一意的に定まる:

$$T(\tau)^{8s}=\alpha G_{4s}^{0}(\tau)+\sum_{l=2}^{s}\mu_s(l)G_{2l}^{0}(\tau)G_{4s-2l}^{0}(\tau).$$

無限遠点での位数 $\mathrm{ord}_\infty T(\tau)^{8s}=s\geq 2$ から，α は 0 に他ならない．これにより，

$$T(\tau)^{8s}=\sum_{l=2}^{s}\mu_s(l)G_{4s-2l}^{0}(\tau)G_{2l}^{0}(\tau)$$

を得る．係数を比較して，$t_{8s}(n)$ の公式を得る:

$$\begin{aligned}T(\tau)^{8s}&=q^s\sum_{n\geq 0}t_{8s}(n)q^n\\&=\sum_{n>0}\left(\sum_{l=2}^{s}\frac{\mu_s(l)}{(4s-2l-1)!(2l-1)!}\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_{4s-2l-1}^{0}(m)\sigma_{2l-1}^{0}(n-m)\right)q^n\\&=\frac{1}{(4s-2)!}\sum_{n>0}\left(\sum_{l=2}^{s}\mu_s(l)\binom{4s-2}{2l-1}\rho_{4s-2l-1,2l-1}^{0}(n)\right)q^n.\end{aligned}$$

一方，$r_{8s}(n)$ の公式に対し，次の事実を用いる:

$$\begin{aligned}&(1)\quad T(\tau)^{8s}|\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\2&0\end{smallmatrix}\right)=2^{-6s}\theta(\tau+1/2)^{8s},\\&(2)\quad G_k^{0}(\tau)=2^{k/2}G_k^{i\infty}(\tau)|\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\2&0\end{smallmatrix}\right).\end{aligned}$$

ここで，$f(\tau)|\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=(ad-bc)^{k/2}(c\tau+d)^{-k}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ は通常の slash operator である．(1), (2) を用いることにより，次の式を得る:

$$\theta(\tau+1/2)^{8s}=2^{8s}\sum_{l=2}^{s}\mu_s(l)G_{4s-2l}^{i\infty}(\tau)G_{2l}^{i\infty}(\tau).$$

係数を比較すると，$r_{8s}(n)$ の公式を得る:

$$\begin{aligned}\theta(\tau)^{8s}&=\sum_{n\geq 0}r_{8s}(n)q^n\\&=2^{8s}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\sum_{l=2}^{s}\frac{\mu_s(l)}{2^{4s}(4s-2l-1)!(2l-1)!}\sum_{m=0}^{n}\sigma_{4s-2l-1}^{i\infty}(m)\sigma_{2l-1}^{i\infty}(n-m)\right)q^n\\&=\frac{2^{4s}}{(4s-2)!}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\sum_{l=2}^{s}\mu_s(l)\binom{4s-2}{2l-1}\rho_{4s-2l-1,2l-1}^{i\infty}(n)\right)q^n.\end{aligned}$$

$\square$

最後に，集会中お世話になりました世話人の野田工先生と，今回講演の機会を紹介してくださいました赤塚広隆さんに深くお礼申し上げます．

参考文献

[1] H. H. Chan, K. S. Chua, *Representations of integers as sums of 32 squares*, The Ramanujan J. 7 (2003) 79–89.

[2] H. Gangle, M. Kaneko, D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, Automorphic forms and Zeta functions", Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.

[3] Ő. Imamoḡlu, W. Kohnen, *Representations of integers as sums of an even number of squares*, Math. Ann., 333(4), 2005, 815–829.

[4] M. Kaneko, 二重ゼータ値, 二重 Eisenstein 級数, およびモジュラー形式, 京大数理研短期共同「多重ゼータ値の研究」報告集, (2004).

[5] M. Kaneko, K. Tasaka, *Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level* 2, preprint(2011).

[6] K. Tasaka, *On a conjecture for representations of integers as sums of squares and double shuffle relations*, preprint(2011).